



Sviluppare le competenze matematiche

Irene C. Mammarella

Overview

Prerequisiti del calcolo

Difficoltà e disturbo specifico del calcolo

L'ansia per la matematica

Prerequisiti del calcolo



Come avviene l'apprendimento del calcolo nei bambini?

Prerequisiti del calcolo

Il senso del numero

“Capacità di percepire, rappresentare e manipolare quantità numeriche.”

- **Object tracking system (OTS)** → Rappresentazione esatta di piccole quantità.
- **Subitizing**: capacità di enumerare in modo rapido ed accurato piccole quantità di oggetti (< 4-6).
- **Approximate number system (ANS)** → Rappresentazione approssimata di grandi quantità.

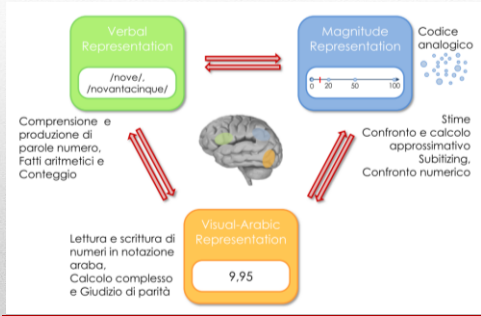
Stima: capacità di enumerare in modo approssimato quantità di oggetti fuori dal range del subitizing (> 4-6).
Acuità numerica: percepire la differenza di numerosità tra due insiemi di oggetti.

- Determinati biologicamente: origine genetica.
- Innati: presenti fin dalla nascita.
- Condivisi con altre specie animali (a livello elementare).
- Modulari: automatici, rapidi, non appresi, specifici.



Prerequisiti del calcolo

Modello del triplo codice di Dehaene



Dehaene, S., & Cohen, L. (1985). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, 1, 83-120.

L'importanza di conoscere le tappe di sviluppo e i meccanismi innati

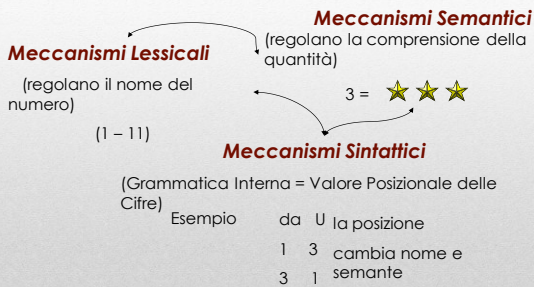
PRINCIPALI TAPPE DI SVILUPPO DELLE ABILITÀ DI CALCOLO

Età (anni; mesi)	Tappe
0; 0	Discrimina in base a piccole numerosità (Antell e Keating, 1983)
0; 4	Somma e sottrae uno (Wynn, 1992)
0; 11	Distingue sequenze di numerosità crescenti e decrescenti (Brannon, 2002)
2; 0	Inizia ad apprendere la sequenza di parole-conto (Fuson, 1992); è in grado di stabilire la corrispondenza uno a uno nei compiti di ripartizione (Potter e Levy, 1968)
2; 6	Riconosce che le parole-numero significano "maggiore di uno" ("analfam"; Wynn, 1990)
3; 0	Conta piccoli numeri di oggetti (Wynn, 1990)
3; 6	Somma e sottrae uno con oggetti e parole-numero (Starkey e Gelman, 1982); è in grado di usare il principio cardinale per stabilire la numerosità di un insieme (Gelman e Gallistel, 1978)
4; 0	Usa le dita per aiutarsi nell'addizione (Fuson e Kwon, 1992)
5; 0	È in grado di aggiungere piccoli numeri senza essere capace di contare la somma (Starkey e Gelman, 1982)
5; 6	Comprende la proprietà commutativa dell'addizione e conta avanti a partire dall'addendo maggiore (Carpenter e Moser, 1982); conta correttamente fino a 40 (Fuson, 1988)
6; 0	"Conserva" il numero (Piaget, 1952)
6; 6	Comprende la complementarità di addizione e sottrazione (Bryant et al., 1999); conta correttamente fino a 80 (Fuson, 1988)
7; 0	Recupera alcuni fatti aritmetici dalla memoria

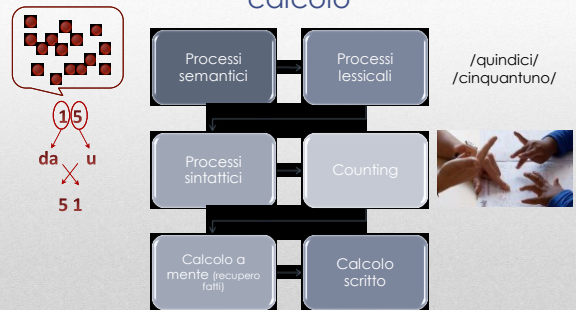
L'intelligenza numerica

- Subitizing
- Corrispondenza biunivoca
- Conteggio n+1 n-1
- Accesso semantico preverbale

Tre meccanismi del calcolo



Meccanismi di base dell'abilità di calcolo



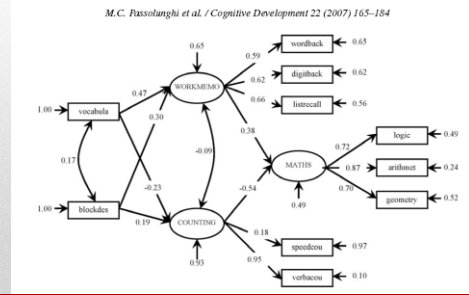
Prerequisiti del calcolo

• Quali processi cognitivi mediano il passaggio dalla rappresentazione di quantità alle abilità di calcolo?

- Passolunghi, et al. 2007
- **Partecipanti:** 170 bambini testati all'inizio e alla fine della prima classe della scuola primaria
- **Materiali:**
 - Fase iniziale: Prove di intelligenza (VC e DC); prove di ML verbale, prove di segmentazione fonemica e di fusione sillabica, prerequisiti del calcolo (counting, confronto numerosità, lettura e scrittura di numeri)
 - Fase finale: prestazioni in prove di matematica adatte all'età (test di Amoretti et al, 1993)

Prerequisiti del calcolo

• Quali processi cognitivi mediano il passaggio dalla rappresentazione di quantità alle abilità di calcolo?



Passolunghi, et al. 2007

Prerequisiti del calcolo

• Quali processi cognitivi mediano il passaggio dalla rappresentazione di quantità alle abilità di calcolo?

- Passolunghi, Mammarella, & Altoè, 2008
- **Partecipanti:** 72 bambini testati in prima e seconda della scuola primaria
- **Materiali:**
 - Fase iniziale: Prove di intelligenza (VC e DC); prove di ML verbale, prove di segmentazione fonemica e di fusione sillabica, prerequisiti del calcolo (counting, confronto numerosità, lettura e scrittura di numeri)
 - Fase finale: prestazioni in prove di matematica adatte all'età (test di Amoretti et al, 1993)

Prerequisiti del calcolo

• Quali processi cognitivi mediano il passaggio dalla rappresentazione di quantità alle abilità di calcolo?

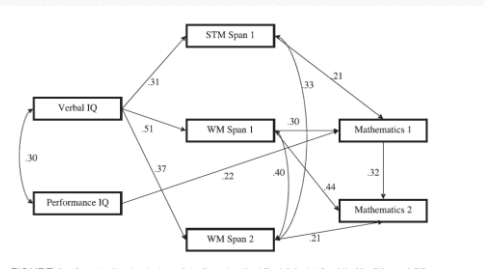


FIGURE 3 Standardized solution of the Longitudinal Path Model 5. $\chi^2(9, N = 72) = 12.75, p = .17$ RMSEA = .078, NNFI = .96, CFI = .98.

Passolunghi, Mammarella, 2008

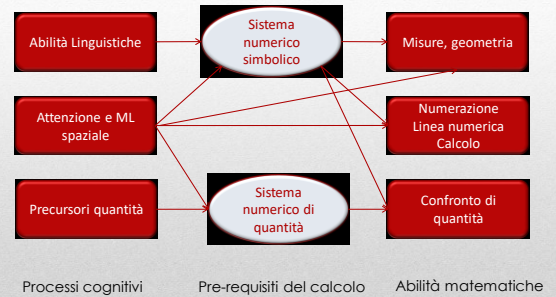
Prerequisiti del calcolo

Modello di LeFevre et al. 2010

- Processi cognitivi coinvolti in 3 diverse vie di apprendimento della matematica:
1. Abilità linguistiche → apprendimento del sistema simbolico (es. scrittura numeri arabici)
 2. Precursori della rappresentazione di quantità → operazioni sulle quantità (es. di più, di meno)
 3. Attenzione spaziale e ML spaziale → coinvolte in modo indipendente in entrambi

Prerequisiti del calcolo

Modello di LeFevre et al. 2010



Processi e sistemi più profondi

Al di sotto di questi processi molto complessi e articolati (e di ordine superiore) si nasconde il funzionamento di strutture più basali del nostro sistema cognitivo, quelle che ne consentono il generale funzionamento.

Parliamo di Memoria di Lavoro

Memoria di Lavoro (WM)

Baddeley, 1986



Memoria di Lavoro



Non si tratta di MEMORIA nel senso comune del termine
- es. Ricordo -



Calcolo a mente
Calcolo scritto
Soluzione di problemi matematici

Memoria di lavoro e calcolo a mente



Memoria di lavoro e calcolo scritto

Sottrazione vs Addizione → maggiore visualizzazione;
MLVS supporta carico necessario per eseguire più
operazioni mentali

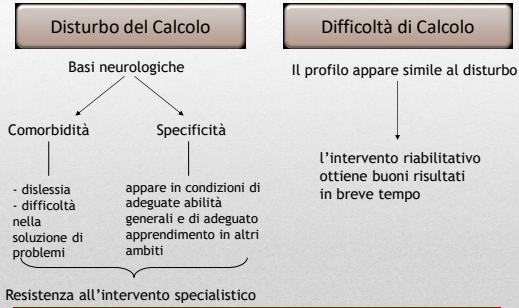
$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 8 \\ \hline \end{array} +$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 8 \\ \hline \end{array} -$$



Difficoltà e disturbi specifici del calcolo

Disturbo vs Difficoltà



Incidenza del disturbo del calcolo

- Nella letteratura internazionale: dal 5 al 7% della popolazione scolastica (Butterworth et al, 2011; Lewis, et al., 1994; Geary, 2010)
- In Italia i bambini con diagnosi di discalculia sono stimati all'incirca essere meno del 2%, ma indagini successive rivelano come circa 5 bambini per classe (20%) vengono segnalati per difficoltà nell'apprendimento matematico (Lucangeli & Mammarella, 2010)

Amy Devine, Fruzsina Soltész, Alison Nobes, Usha Goswami, Dénes Szűcs*

Department of Psychology, University of Cambridge, UK

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Learning and Instruction

journal homepage: www.elsevier.com/locate/learninstruc

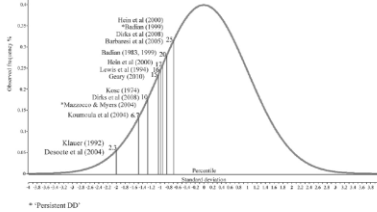
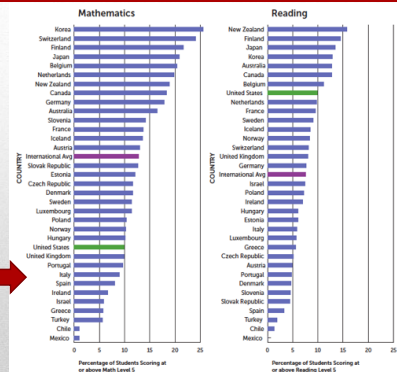


Fig. 1. The cutoffs used in DD prevalence studies illustrated on the normal distribution. The percentile scale runs from 0 to 100. Percentile values are shown on top of the normal distribution curve.



Pisa 2012, OECD=OCSE Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico

Discalculia Evolutiva

Specifico disturbo nella comprensione ed elaborazione del numero (mancata comprensione dei segni matematici, difficoltà a comprendere i concetti base di particolari operazioni, scorretta organizzazione spaziale dei calcoli, incapacità ad apprendere in modo soddisfacente le tabelline, difficoltà ad allineare correttamente i numeri o inserire i decimali..)

Definizione secondo la Consensus Conference, 2007

- 2 profili distinti di **disturbo del calcolo**
 - **Deficit** nella strutturazione cognitiva delle componenti di **cognizione numerica** (*cecità ai numeri*: subitizing, meccanismi di quantificazione, comparazione, seriazione, strategie di calcolo a mente)
 - **Deficit nell'acquisizione delle procedure** (lettura, scrittura e messa in colonna dei numeri) e/o negli **algoritmi del calcolo** (recupero dei fatti numerici e algoritmi del calcolo scritto).

Possibili sotto-tipi

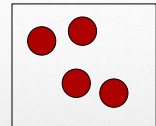
1. A base semantica-sintattica
2. Memorizzazione dei fatti aritmetici
3. Procedure del calcolo scritto

Oppure

1. Sotto-tipo analogico
2. Sotto-tipo verbale
3. Sotto-tipo visivo

P.A.R.C.C., 2011

Discalculia

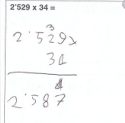


3 tipologie:

1. **DEFICIT DELLA COGNIZIONE NUMERICA**

Deficit nella strutturazione cognitiva delle componenti di **cognizione numerica** (cecità ai numeri: subitizing, meccanismi di quantificazione, comparazione, seriazione, strategie di calcolo a mente)

Discalculia



2. DEFICIT NELLE PROCEDURE DEL CALCOLO

Deficit nell'acquisizione delle procedure (lettura, scrittura e messa in colonna dei numeri) e/o negli algoritmi del calcolo (algoritmi del calcolo scritto).

3. DEFICIT NELL'ACQUISIZIONE DEI FATTI NUMERICI

Deficit nell'acquisizione di semplici calcoli che possono essere automatizzati (tabelline, operazioni semplici)

Studi più recenti

Research in Developmental Disabilities 64 (2017) 152–167

Contents lists available at ScienceDirect

Research in Developmental Disabilities

ELSEVIER

Research paper

(Non-)symbolic magnitude processing in children with mathematical difficulties: a meta-analysis

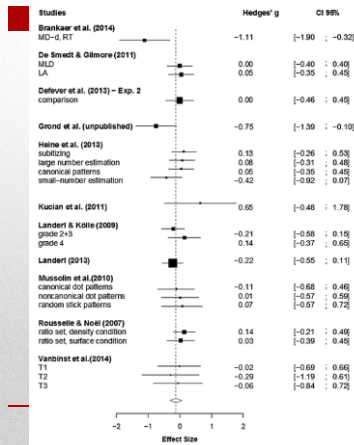
Christin Schwenk^{a,*}, Delphine Sasanguie^{b,c}, Jörg-Tobias Kuhn^a, Sophia Kempe^d, Philipp Doebler^d, Heinz Holling^e

^a Institute of Psychology, University of Münster, Hübnerstraße 21, 48149 Münster, Germany

^b Brain and Cognition, KU Leuven, Herestraat 49, box 3711, 3000 Leuven, Belgium

^c Faculty of Psychology and Educational Sciences, KU Leuven, Herestraat 49, 3000 Leuven, Belgium

^d TU Dortmund University, Faculty of Statistics, Technische Universität Dortmund, 44221 Dortmund, Germany



• Distance effect: non-symbolic

Sintesi dei risultati

- Meta-analisi ha confrontato bambini con disturbo del calcolo e senza, nella rappresentazione simbolica, non simbolica e nel giudizio di grandezza. I risultati indicano che
 - (a) bambini con disturbo del calcolo sono più lenti nella prova simbolica che non simbolica
 - (b) Nessuna caratteristica del campione: cut-off per selezionare gruppi, o tipo di prova usata mediano le differenze tra i gruppi
 - (c) Non esiste nessuna differenza tra bambini con disturbo del calcolo e senza nel confronto tra distanze numeriche

Cosa differenzia bambini con disturbo del calcolo e senza?

- Memoria di lavoro!!!



Subtypes and comorbidity in mathematical learning disabilities: Multidimensional study of verbal and visual memory processes is key to understanding

11

8. Szűcs¹
University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom
¹Corresponding author: TEL: +44-01223-767600, FAX: +44-01223-767602,
e-mail address: ds177@cam.ac.uk

Table 3 The Difference (Diff.) in Absolute Effect Sizes (Random Effects Model) When Comparing Studies Which Matched vs Did Not Match (N.M.) Reading Achievement and/or IQ in MLD and Control Groups

	All Studies	Reading		IQ		Reading+IQ	
		Matched	N.M.	Matched	N.M.	Matched	N.M.
visTM	0.59	0.57	0.58	0.58	0.61	0.68	0.47
visSM	0.71	0.21	0.63	0.18	0.59	0.70	0.58
verWM	0.75	0.59	0.94	0.35	0.74	0.78	0.62
visWM	0.76	0.90	0.61	0.20	0.63	0.79	0.16

Studies which matched reading in MLD and control participants reported smaller absolute difference (Diff.) matched not matched groups' dential between MLD and control groups in verbal STM and WM performance. In contrast, the MLD vs control difference was larger in visual STM and visual WM performance in matched than in nonmatched groups.

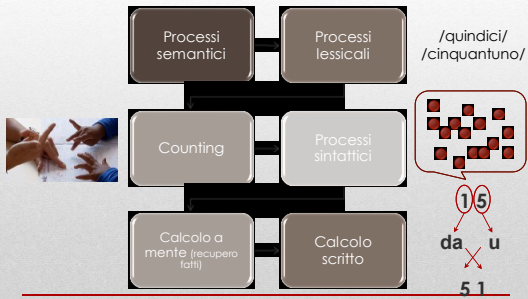
Possibili profili

- Discalculia associata a difficoltà di lettura (base verbale) → cadute in prove di MBT e ML Verbale. Problemi legati ad abilità verbali: es. fatti numerici
- Discalculia a base visuospatiale → cadute in prove di MBT e ML visuospatiale. Difficoltà procedurali e nella stima di quantità

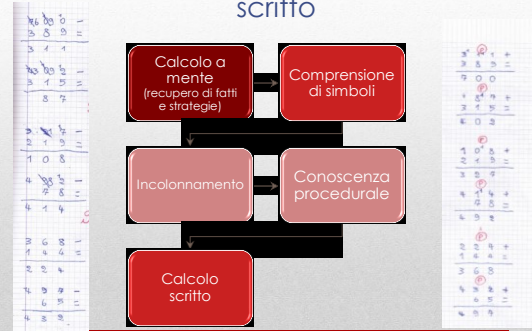
Cosa osservare a scuola?



Meccanismi di base dell'abilità di calcolo



Dal calcolo a mente al calcolo scritto



- **STRUMENTI COMPENSATIVI** : strumenti, tecnologici e non che permettono di compensare la debolezza funzionale derivante dal disturbo. Facilitano l'esecuzione dei compiti automatici compromessi dal disturbo specifico.

Si distinguono in :

- **specifici** → supportano in modo diretto l'abilità deficitaria (lettura/ortografia/grafia/numero/calcolo) → *sintesi vocale, calcolatrice, videoscrittura con correttore ortografico, ecc.*
- **non specifici** o **funzionali** → supportano aspetti deficitari di abilità "trasversali" quali memoria, attenzione → *tavola pitagorica, tabella dei verbi, delle formule matematiche, ecc.*

▪ DISTURBO SPECIFICO DEL CALCOLO

➤ Scuola primaria

Si può suggerire l'uso di uno o più dei seguenti strumenti compensativi per la matematica:

- tavole pitagoriche;
- tabella delle misure;
- tabella delle formule geometriche;
- formulari

➤ Scuola secondaria di primo grado

- La **calcolatrice** è il più semplice e potente strumento compensativo per le difficoltà di calcolo.
- Per un suo efficace uso compensativo, è necessario che il disturbo sia circoscritto al calcolo.
- L'uso di base della calcolatrice richiede un addestramento specifico abbastanza breve.
- Può prevedere un *uso parziale o occasionale*, riferito solo ad alcune attività particolari e può essere introdotta in qualsiasi momento del percorso scolastico.

• *Prerequisiti per l'utilizzo della calcolatrice:*

- capacità di scrivere correttamente i numeri,
- capacità di individuare i termini di un problema, l'operazione da svolgere.

Funzione didattica e compensativa della calcolatrice

- Per un suo uso corretto l'alunno deve aver colto il significato di una determinata operazione.
- Inoltre, può essere utilizzata anche per facilitare l'acquisizione di un'operazione.

Alcuni suggerimenti..

- Evitare di far ripetere molte volte gli esercizi in cui si è verificato l'errore → **rischio di automatizzare gli errori.**
- Aiutare il bambino con difficoltà di calcolo (memorizzare e recuperare i risultati parziali delle operazioni) → è opportuno **limitare il sovraccarico della memoria di lavoro**, permettendo all'alunno di utilizzare dei supporti e/o la tavola pitagorica nello svolgimento di un compito di calcolo a mente.

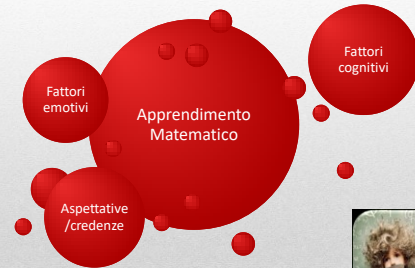
- **Sollecitare la capacità di stimare in modo approssimativo il risultato ragionevole di un'operazione** consente al bambino di controllare la propria prestazione e accorgersi di eventuali errori

- **Sfruttare la rappresentazione grafica** può agevolare la comprensione di *concetti più astratti*, come frazioni e percentuali → può essere utile proporre esperienze concrete o rappresentare visivamente i rapporti tra l'intero e le parti, la divisione dell'intero in parti uguali, il confronto tra frazioni o i calcoli con le frazioni.



Ansia e matematica

L'ansia specifica per la matematica: Che cos'è?



L'ansia specifica per la matematica

- Le difficoltà in matematica sono associate ad un'**elevata ansia**: essa può avere un impatto negativo sull'iniziale apprendimento della materia e conseguentemente sulla prestazione.
- L'**ansia per la matematica** contribuisce a situazioni di insuccesso, causate dalla sensazione di disagio che si prova nel momento in cui viene richiesto di eseguire compiti matematici o di lavorare con materiale numerico.

L'ansia per la matematica (*math anxiety – MA*)

- L'ansia per la matematica è uno stato caratterizzato da sentimenti di **tensione** e **preoccupazione**, che interferisce con la manipolazione dei numeri e la risoluzione di problemi matematici in vari contesti della vita quotidiana e scolastica (Richardson e Suinn, 1972).
- L'ansia per la matematica è un costrutto multidimensionale che coinvolge numerosi aspetti :
 - Emotivi**: sentimenti/emozioni negative
 - Cognitivi**: preoccupazioni e pensieri intrusivi;
 - Fisiologici**: aumentato *arousal*, stress e agitazione di fronte a stimoli numerici;
 - Comportamentali**: evitamento di contesti o carriere professionali che richiedono l'uso di abilità matematiche.

Fattori di rischio dell'ansia per la matematica

- Aspetti cognitivi:** Alcuni fattori cognitivi (bassa attitudine in matematica o scarsa capacità di memoria di lavoro) possono indurre l'ansia per la matematica.
 - L'ansia per la matematica disturba le risorse di memoria di lavoro, necessarie per poter svolgere compiti matematici: rende difficile la capacità di concentrarsi e può interferire con la memorizzazione dei contenuti.
- Fattori di personalità e fattori emotivo-motivazionali:** L'ansia per la matematica può essere indotta da aspetti legati alla personalità e da componenti emotivo-motivazionali, quali:
 - pensieri di fallimento, scarsa percezione delle proprie abilità matematiche, mancanza di fiducia in se stessi e scarsa autostima, scarsa motivazione, atteggiamento negativo verso la matematica, differenze di genere.
- Fattori ambientali:** Tra i fattori ambientali che possono contribuire all'insorgere e allo sviluppo dell'ansia per la matematica ci sono:
 - condizione socio-economica e culturale della famiglia, esperienze scolastiche, rapporto con gli insegnanti.

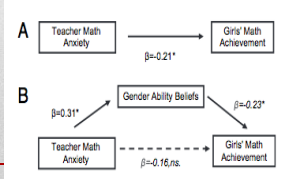
Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement

Sian L. Beilock¹, Elizabeth A. Gunderson, Gerardo Ramirez, and Susan C. Levine
 Department of Psychology and Committee on Education, University of Chicago, IL 60607

Edited by Edward E. Smith, Columbia University, New York, NY, and approved December 17, 2009 (received for review September 23, 2009)

People's fear and anxiety about doing math—over and above actual math ability—can be an impediment to their math achievement. We show that when the math-anxious individuals are female elementary school teachers, their math anxiety carries over

Even more striking is that any relation that may exist between teacher anxiety and student achievement might not be uniform across all students and their teachers. Children are more likely to emulate the behavior and attitudes of same-gender vs. cross-

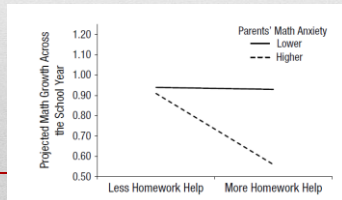


Research Article



Intergenerational Effects of Parents' Math Anxiety on Children's Math Achievement and Anxiety

Erin A. Maloney¹, Gerardo Ramirez², Elizabeth A. Gunderson³, Susan C. Levine¹, and Sian L. Beilock¹
¹University of Chicago, ²University of California, Los Angeles and ³Temple University



Contents lists available at ScienceDirect
 Learning and Individual Differences

journal homepage: www.elsevier.com/locate/lindif

Maths anxiety in primary and secondary school students: Gender differences, developmental changes and anxiety specificity

Francesca Hill¹, Irene C. Mammarella^{1,b}, Amy Devine², Sara Caviola³, Maria Chiara Fassolunghi¹, Dénes Szűcs^{1,a,b}

¹ Department of Psychology, University of Cambridge, UK
² Department of Developmental and Social Psychology, University of Padova, Italy
³ Department of Psychology, University of Trieste, Italy

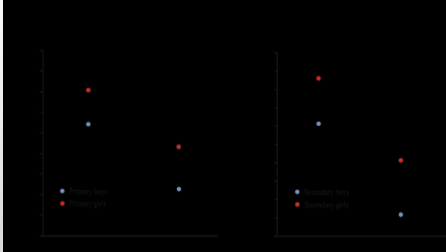
Partecipanti

- Campione totale 981 studenti: scuola primaria (N = 639; 322 F, 317 M); scuola secondaria (N = 342; 148 F, 194 M).

Materiali

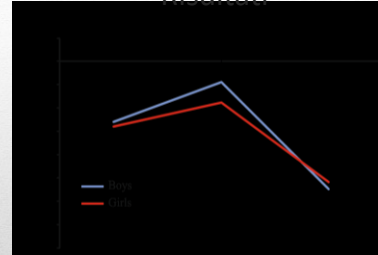
- AMAS (Hopko, et al. 2003) → math anxiety - MA
- RCMAS 2 (Reynolds & Richmond, 2012) → ansia generale
- AC-MT (Cornoldi, et al. 2004; 2012) → calcolo scritto

Risultati



Math Anxiety: Gender differences x level of schooling
Bootstrap confidence interval estimations used 10,000 permutations with replacement (Chihara & Hesterberg, 2011) and computed bias-corrected and accelerated (BCa) confidence intervals (Efron, 1987).

Risultati



Arithmetic: Gender differences x level of schooling
Bootstrap confidence interval estimations used 10,000 permutations with replacement (Chihara & Hesterberg, 2011) and computed bias-corrected and accelerated (BCa) confidence intervals (Efron, 1987).

Risultati

Group (N= sample size)	Mean age ± SE	Zero-order Correlations (95% Bootstrapped Confidence Intervals)		Partial Correlations (95% Bootstrapped Confidence Intervals)	
		RCMAS-2	Arithmetic	Arithmetic	R ²
Primary Girls (N=322)	114 ± 0.7	.36 (.26-.45)	.13 (-.23-.02)	-.11 (-.22-.01)	.01 (.05-.00)
Secondary Girls (N=148)	152 ± 1	.41 (.24-.56)	.34 (-.46-.19)	-.28 (-.41-.13)	.08 (.02-.17)
Primary Boys (N=317)	114 ± 0.6	.47 (.37-.55)	-.07 (-.19-.05)	-.04 (-.15-.08)	.00 (.01-.02)
Secondary Boys (N=194)	154 ± 0.9	.37 (.21-.50)	-.28 (-.41-.15)	-.22 (-.34-.09)	.05 (.01-.12)

Zero-order and partial correlations. Zero-order correlations: between AMAS and RCMAS-2 scores and between AMAS and arithmetic test scores. Partial correlations: between AMAS and arithmetic test scores whilst partialling out RCMAS-2 scores. Significant correlations are in bold. R² values are also presented for partial correlations between AMAS and arithmetic scores. VIF values for the correlation matrix ranged between 1.12 and 1.23.

Relazione tra MA e aritmetica

Quindi.....



1. Studentesse hanno una maggior MA rispetto a studenti maschi: sia nella scuola primaria che nella secondaria
2. Maschi e femmine ottengono la stessa prestazione alle prove di matematica (in accordo con Hyde et al., 2008; Lindberg et al., 2010)

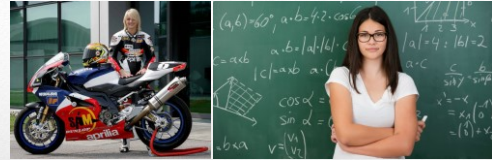
Questo risultato, come suggerito da Devine et al. (2012), potrebbe suggerire che le femmine abbiano una potenziale matematico migliore dei maschi.

3. Correlazione negativa tra MA e aritmetica in alunni della scuola secondaria. Queste correlazioni rimangono significative anche dopo aver controllato per l'ansia generale.

Risultati confermano che non ci sono associazioni tra MA e prestazione aritmetica nei bambini più piccoli (Thomas & Dowker, 2005; Krinzinger et al., 2009).

Come sviluppare le competenze matematiche al meglio?

1. Puntare su TUTTI i pre-requisiti della matematica
 2. Non sovraccaricare la memoria di lavoro
 3. Non creare bias sociali su differenze di genere
-



Grazie per l'attenzione



irene.mammarella@unipd.it
