Piano Nazionale Lauree Scientifiche	Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca Ufficio Scolastico per la Lombardia Bergamo	*Università degli studi di Bergamo*	*Centro per la didattica della matematica e le sue applicazioni Università di Bergamo*

Laboratorio di matematica dinamica con GeoGebra e con la piegatura della carta.

Università degli Studi di Bergamo - Via dei Caniana 2

4° Incontro 27 marzo 2014

Antonio Criscuolo

L’incontro di oggi

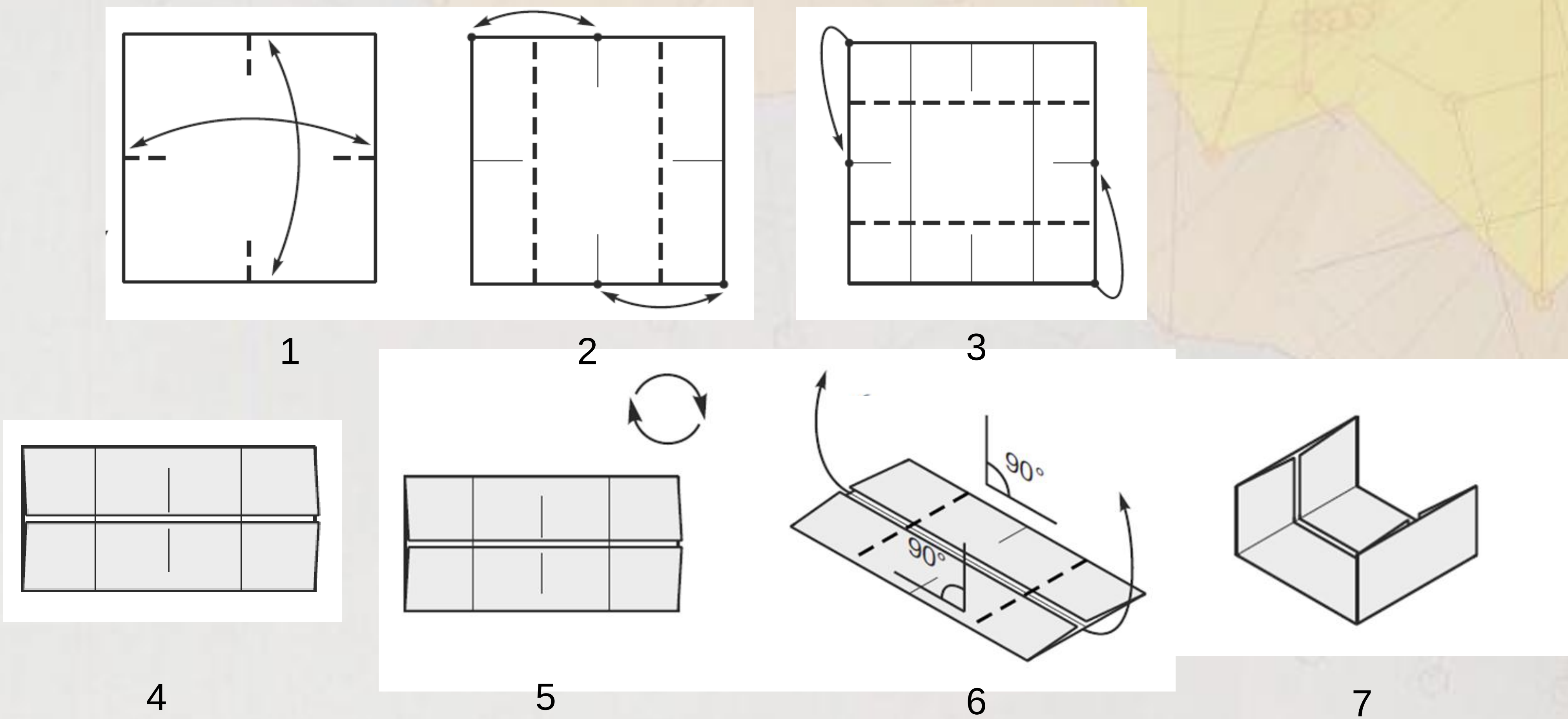
Geometria origami

- Costruzione del cubo in sei moduli
- Costruzione del tetraedro regolare da inscrivere nel cubo
- Discussione delle proprietà del tetraedro regolare inscritto in un cubo
- I numeri irrazionali con la piegatura della carta: la spirale degli irrazionali

Geometria con GeoGebra

- La spirale degli irrazionali con geogebra
- Le isometrie: simmetria assiale, simmetria centrale, traslazione, rotazione

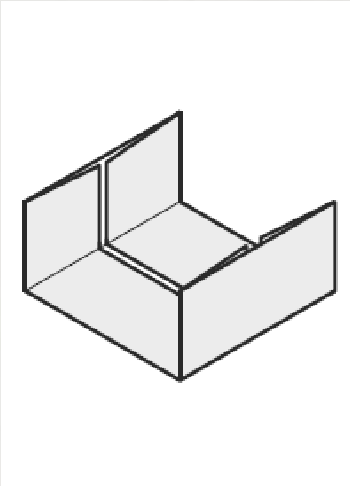
Il cubo con 6 moduli: piegatura del modulo

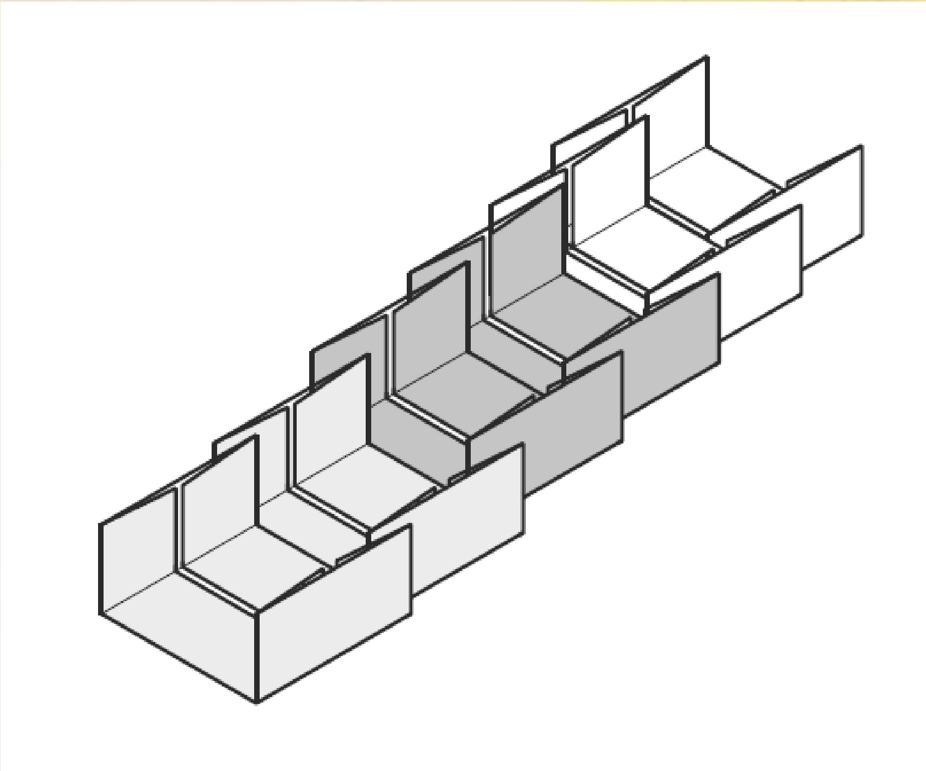


Modello di Paul Jackson

Schemi di Francesco Decio

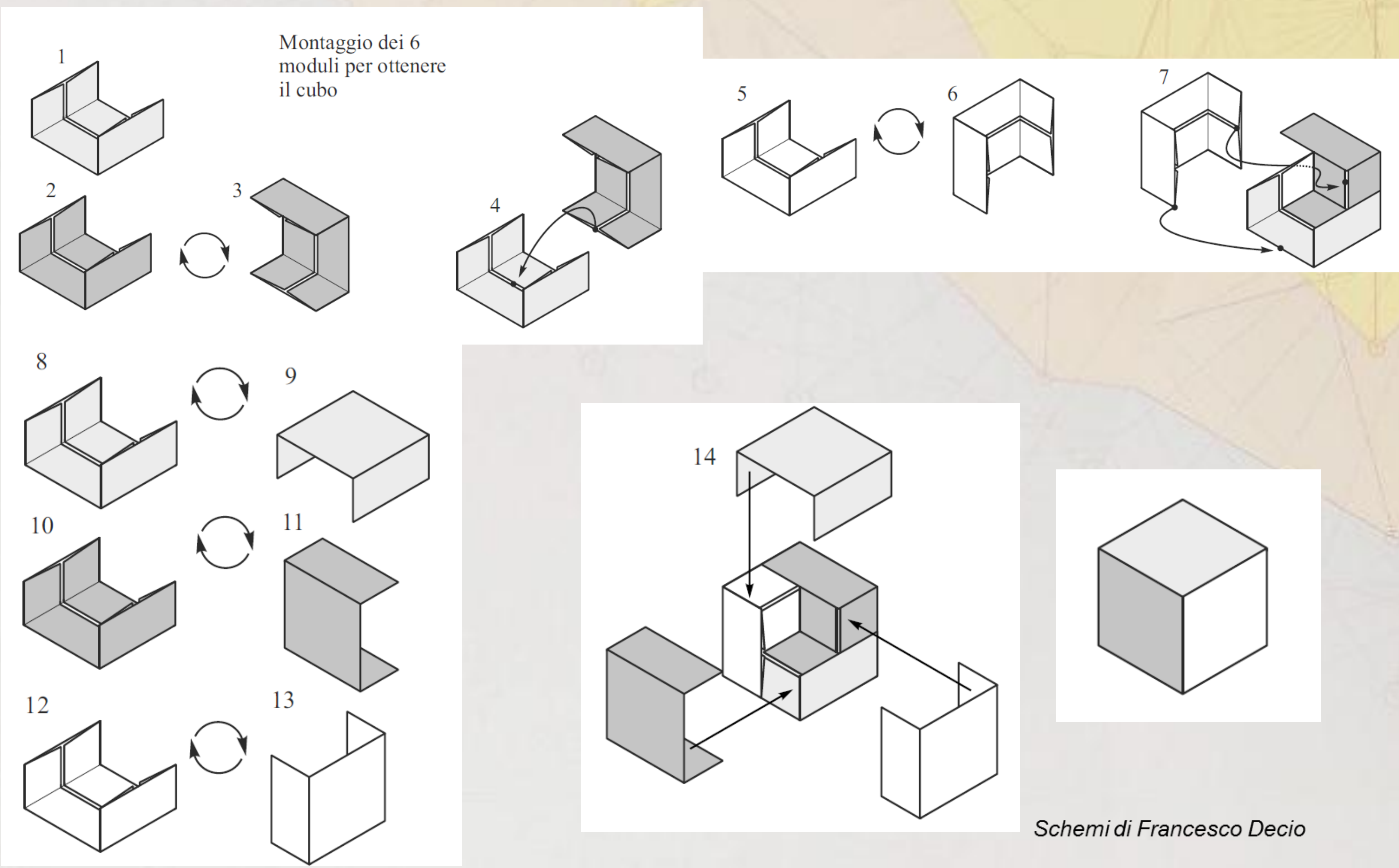
Cubo: 6 facce – 6 moduli





Schemi di Francesco Decio

Cubo: il montaggio dei moduli

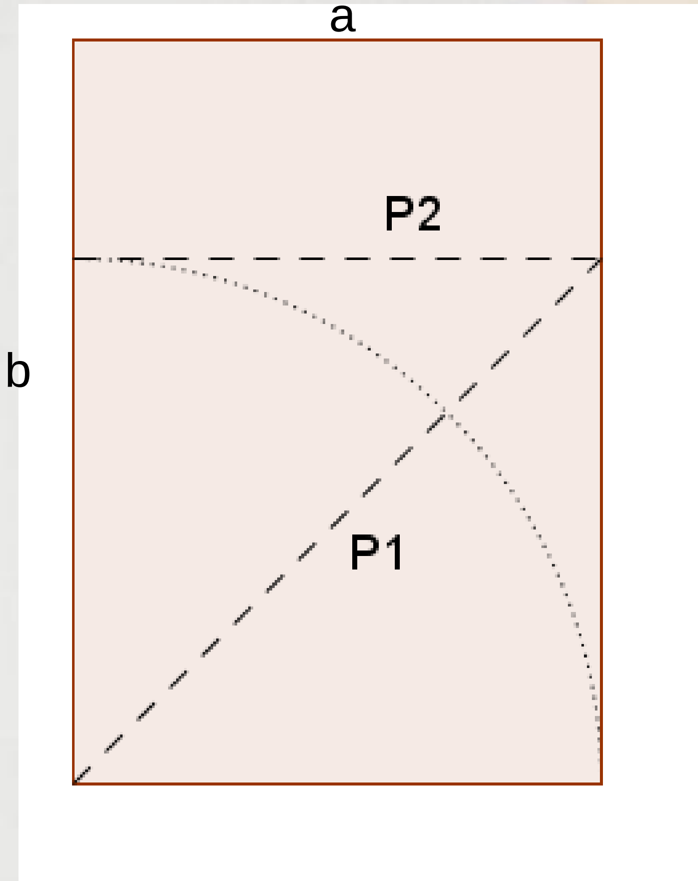


Schemi di Francesco Decio

Cubo e tetraedro inscritto: da un A4 al foglio per costruire il tetraedro

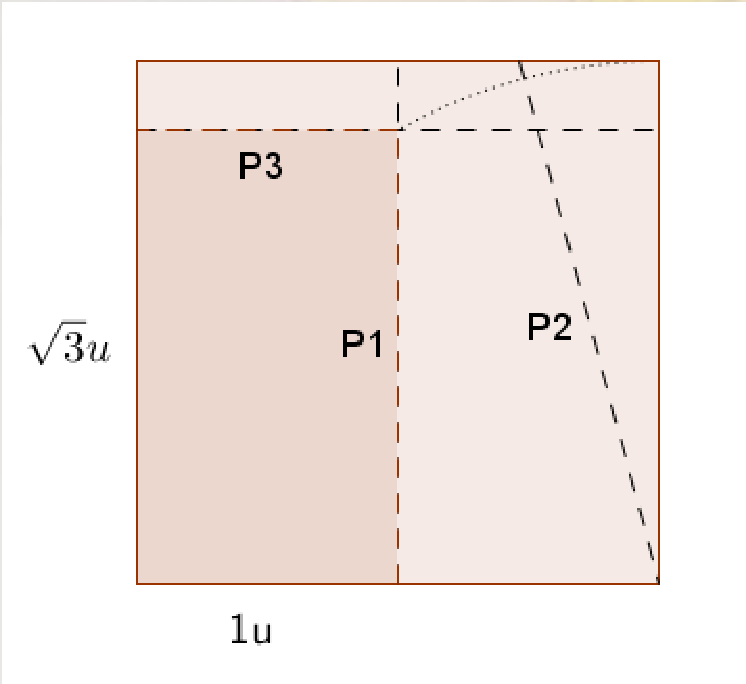
Dal foglio A4 al foglio di formato 1: $\sqrt{3}$ (105 mm x 182 mm)

I



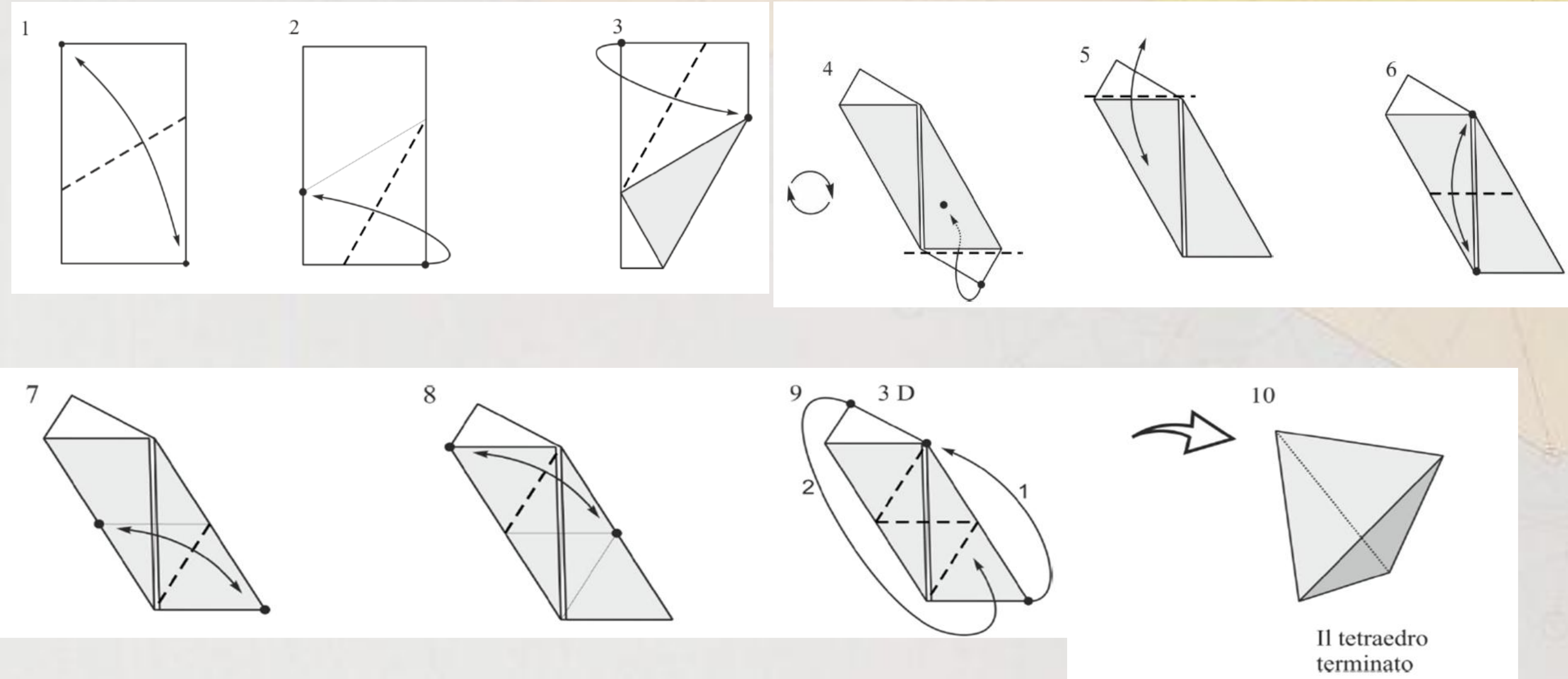
A4 ➔ Quadrato

II



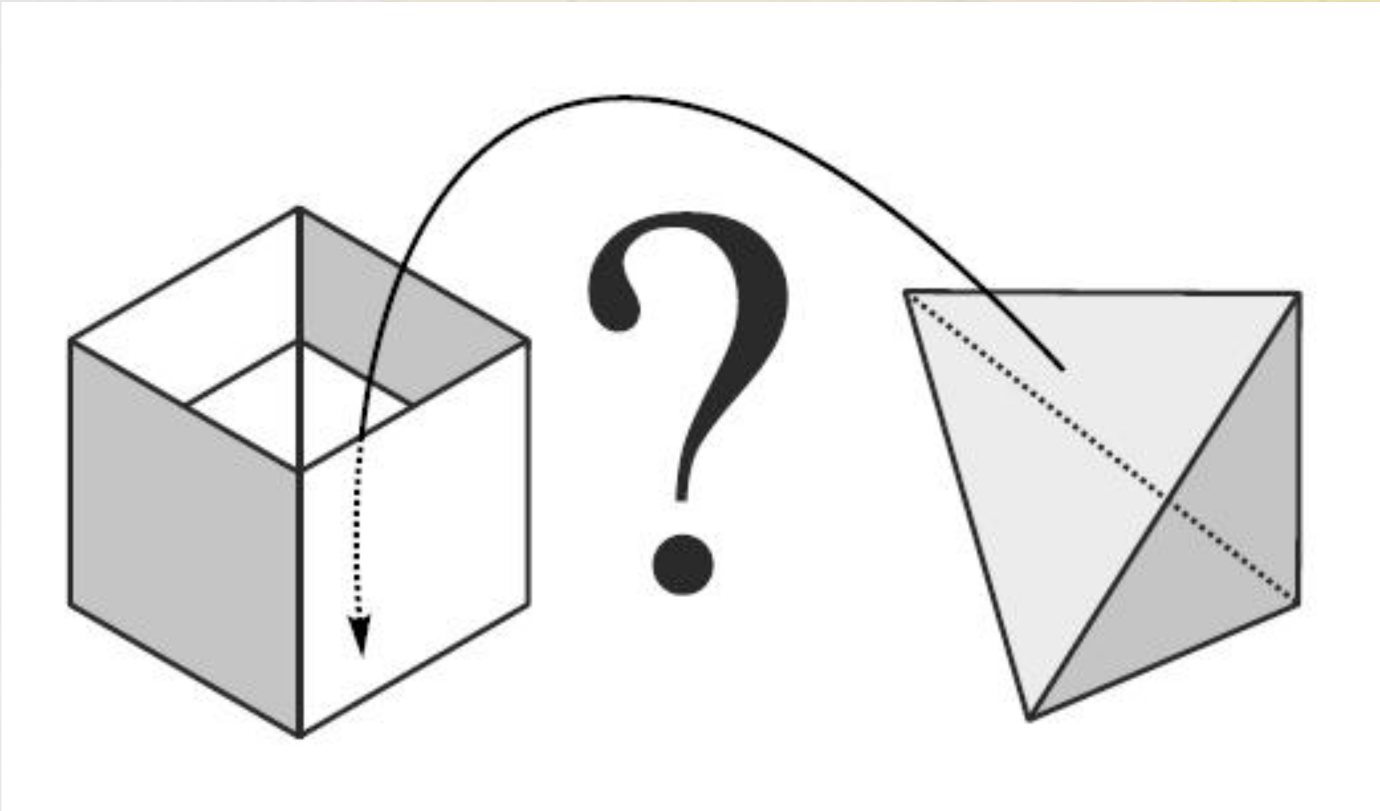
Quadrato ➔ 1: $\sqrt{3}$

Costruzione del tetraedro da un foglio $1 : \sqrt{3}$



Schemi di Francesco Decio

Come inscrivere il tetraedro nel cubo ?



Dallo studio dei modelli del cubo e del tetraedro alle proprietà

E’ possibile inscrivere il tetraedro nel cubo ?

1. Quale dei due spigoli è più lungo, quello del tetraedro o quello del cubo?
2. Quale dei due poliedri è più alto?
3. È possibile inserire il tetraedro nel cubo? In che modo?
4. Quanto vale il rapporto tra lo spigolo del tetraedro e quello del cubo?

Ingombro e dimensioni del tetraedro: quanto vale la distanza tra due spigoli opposti?

1. Quanto vale la distanza tra uno spigolo del tetraedro e lo spigolo opposto (distanza tra due rette sghembe)
2. La distanza tra uno spigolo del tetraedro e lo spigolo opposto è maggiore, uguale o minore dell’altezza del tetraedro?

Confronto tra volumi: quanto vale il volume del tetraedro rispetto al volume del cubo?

1. Di che tipo sono i poliedri che si ottengono per differenza tra il cubo e il tetraedro inscritto?
2. Il volume di questi poliedri in che rapporto è con il volume del tetraedro?
3. Quanto vale il rapporto tra il volume del tetraedro e quello del cubo?
4. Posto pari ad 1 lo spigolo del cubo quanto valgono le grandezze metriche del cubo e del tetraedro: spigoli, altezza, apotema, area della superficie totale e volume, angolo diedro.

I risultati dallo studio dei modelli del cubo e del tetraedro inscritto.

E’ possibile inscrivere il tetraedro nel cubo ?

Lo spigolo del tetraedro è maggiore dello spigolo del cubo ma nonostante ciò il tetraedro è inscrivibile nel cubo se il suo spigolo è uguale a $\sqrt{2}$ volte quello del cubo. Per inscrivere il tetraedro è sufficiente far coincidere un suo spigolo con la diagonale di una faccia «interna» del cubo.

Ingombro e dimensioni del tetraedro: quanto vale la distanza tra due spigoli opposti?

La distanza tra due spigoli opposti del tetraedro , distanza tra due rette sghembe , è pari allo spigolo del cubo, infatti due spigoli opposti del tetraedro coincidono con le diagonali di due facce opposte del cubo.

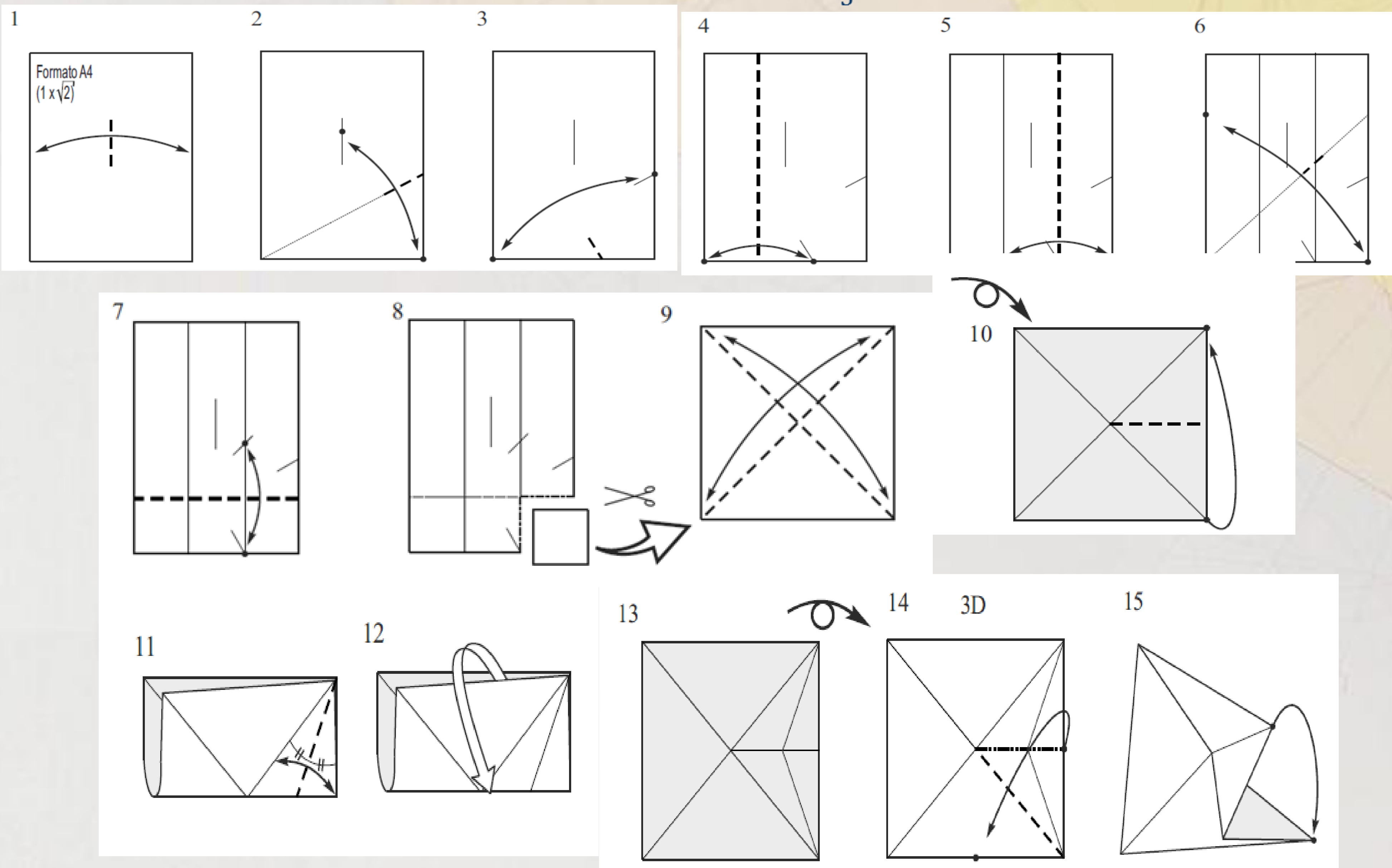
Confronto tra volumi: quanto vale il volume del tetraedro rispetto al volume del cubo?

I poliedri che si ottengono per differenza tra il cubo e il tetraedro inscritto sono quattro piramidi che hanno per base una faccia del tetraedro e per vertice un vertice del cubo.

Il volume di ciascuna di queste piramidi è uguale alla piramide che si ottiene dividendo il tetraedro con il piano passante per un suo spigolo e per la metà dello spigolo opposto. Queste due metà tetraedro, che hanno per base la faccia del tetraedro e per altezza metà dell’altezza del tetraedro, sono equivalenti a ciascuna delle quattro piramidi avendo la stessa base ed altezze che risultano congruenti al confronto. Quindi ciascuna delle sei piramidi in cui è suddiviso il cubo è pari ad un sesto del volume del cubo. Si può così concludere che il tetraedro occupa i $\frac{2}{6}$ *cioè* $\frac{1}{3}$ del volume del cubo in cui è inscritto.

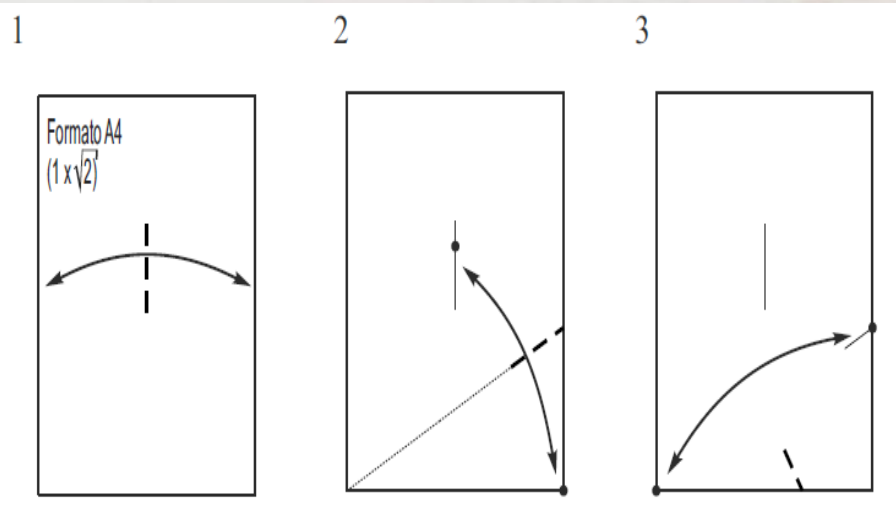
Cubo e tetraedro inscritto: da un A4 i fogli per costruire le piramidi angoloidi del cubo

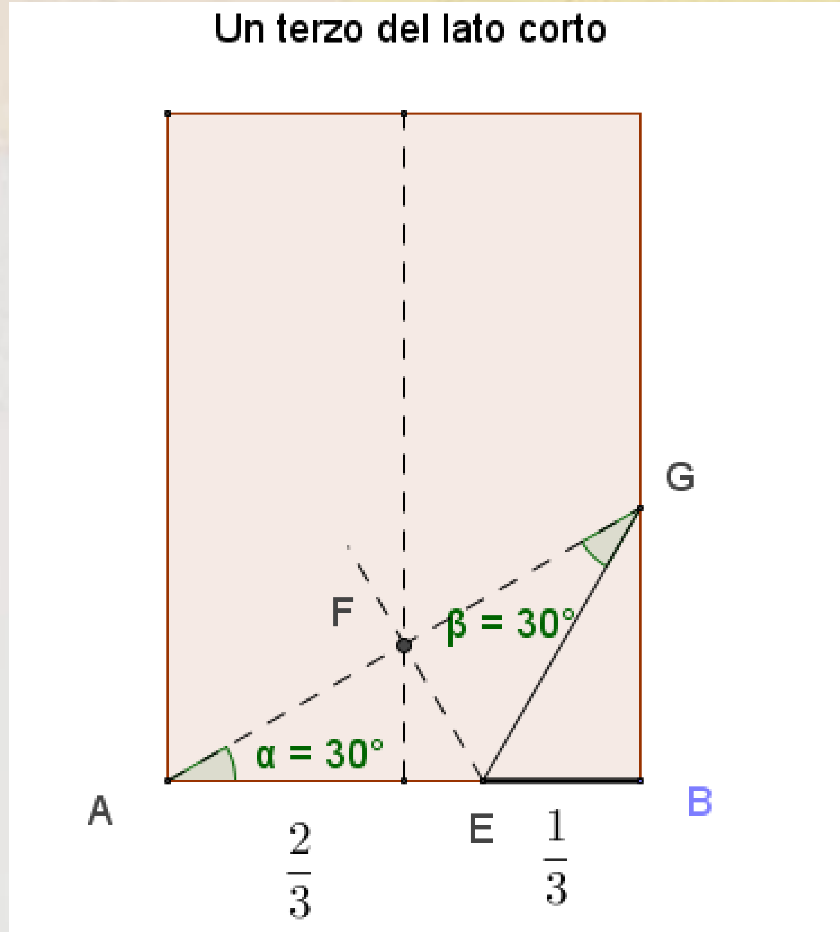
Quadrati di lato pari un terzo del lato corto A4 $\frac{1}{3}a$ (70 mm x 70 mm)



Cubo e tetraedro inscritto: da un A4 i fogli per costruire le piramidi angoloidi del cubo

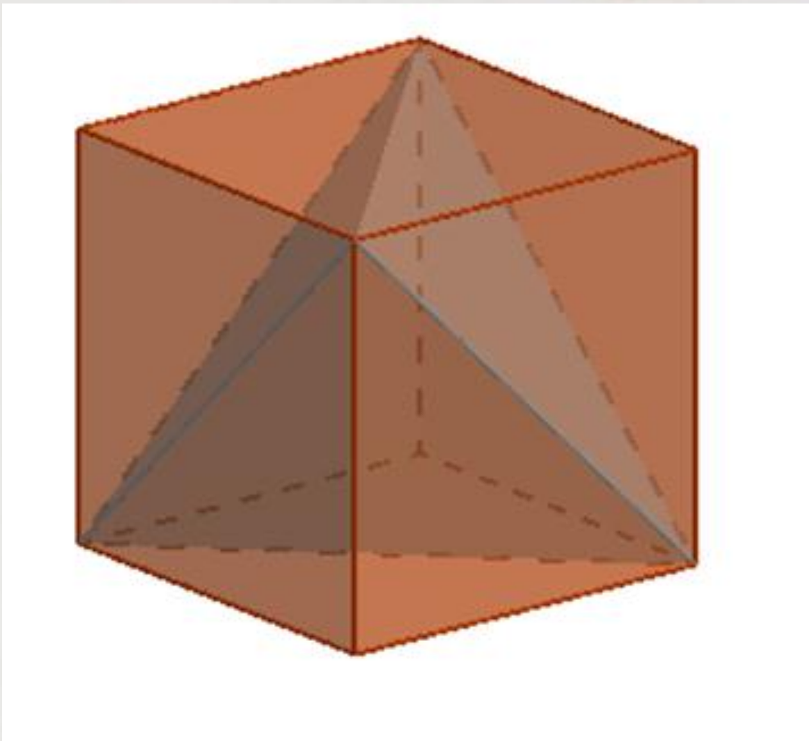
Quadrati di lato pari un terzo del lato corto A4 $\frac{1}{3}a$ (70 mm x 70 mm)

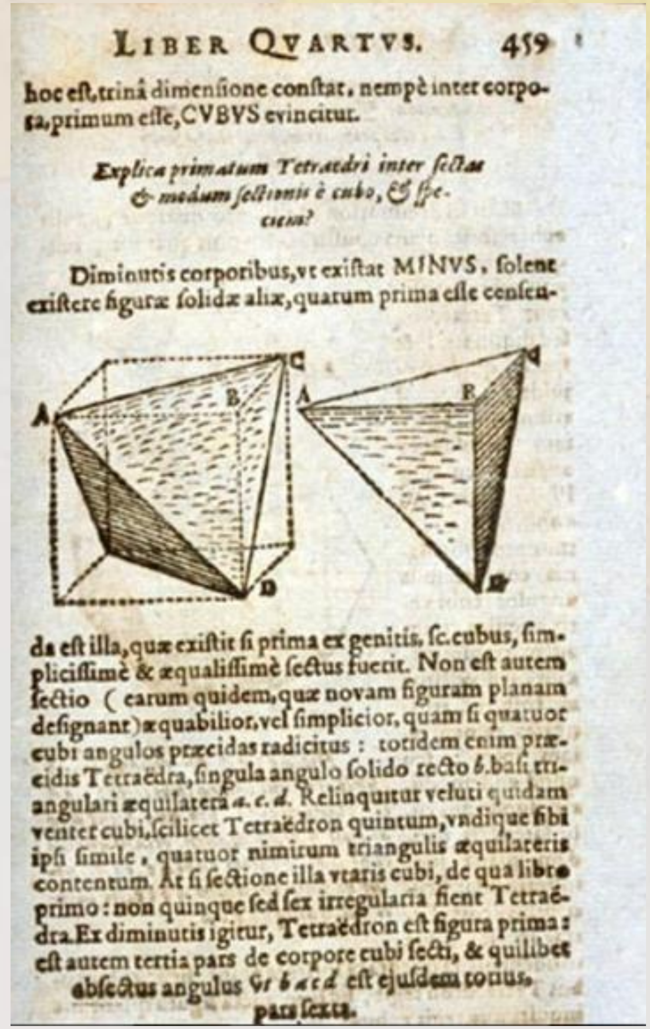




$$EB = FE = \frac{1}{2} AE$$

Il disegno di Keplero del tetraedro regolare inscritto nel cubo





LIBER QVARTVS. 459

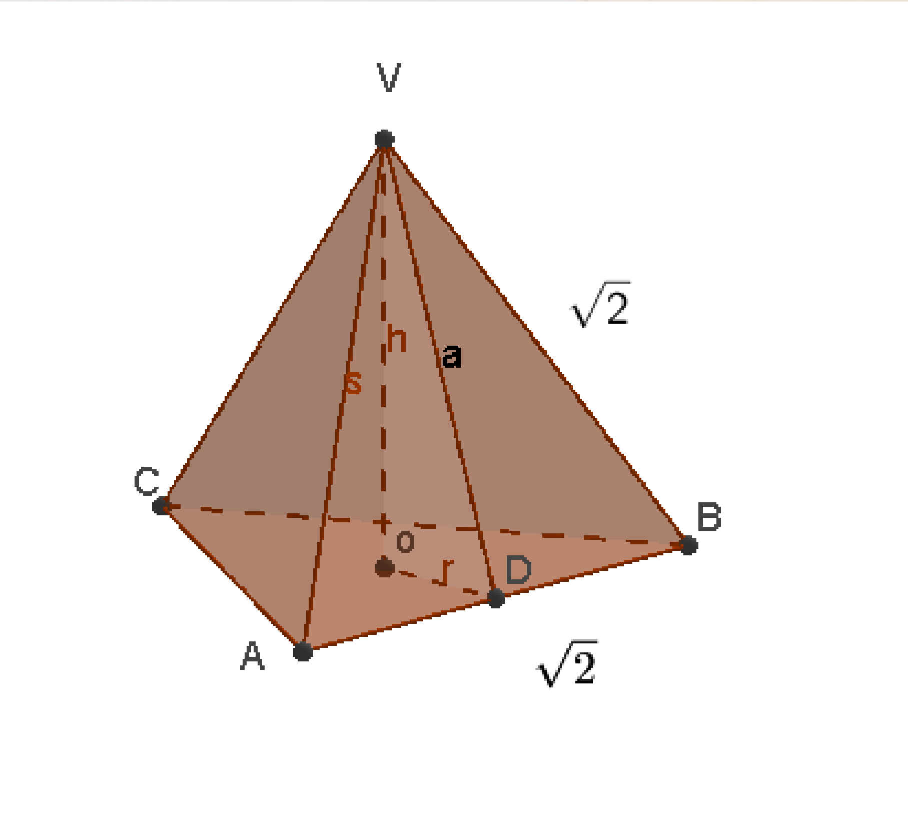
hoc eſt, trinâ dimenſione conſtat, nempè inter corpo-
ſa, primum eſſe, CVBVS evincitur.

*Explica primatum Tetraedri inter ſectas
& modum ſectionis è cubo, & ſpe-
ciem?*

Diminutis corporibus, vt exiſtat MINVS, ſolent
exiſtere figuræ ſolidæ aliæ, quarum prima eſſe cenſen-
da eſt illa, quæ exiſtit ſi prima ex genitis, ſc. cubus, ſim-
pliciſſimè & æqualiſſimè ſectus fuerit. Non eſt autem
ſectio (earum quidem, quæ novam figuram planam
deſignant) æquabilior, vel ſimplicior, quam ſi quatuor
cubi angulos præcidas radicitus : totidem enim præ-
cidis Tetraëdra, ſingula angulo ſolido recto *b*. baſi tri-
angulari æquilatera *a. c. d.* Relinquitur veluti quidam
venter cubi, ſcilicet Tetraëdron quintum, vndique ſibi
ipſi ſimile, quatuor nimirum triangulis æquilateris
contentum. At ſi ſectione illa vtaris cubi, de qua libro
primo: non quinque ſed ſex irregularia fient Tetraë-
dra. Ex diminutis igitur, Tetraëdron eſt figura prima:
eſt autem tertia pars de corpore cubi ſecti, & quilibet
abſectus angulus *vt b a c d* eſt ejuſdem totius,
pars ſexta.

Epitomes Astronomiae

Calcolo del volume del tetraedro di spigolo $\sqrt{2}$



$$\overline{CD} = \overline{VD} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\overline{VO} = \sqrt{\overline{VD}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

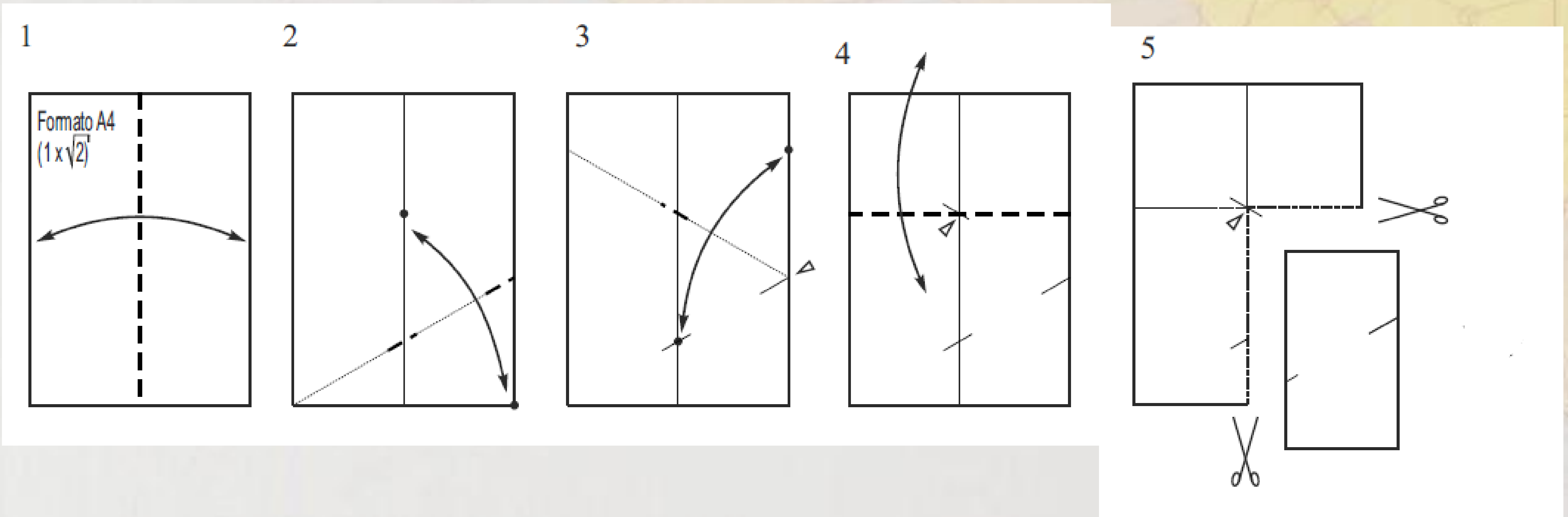
L'altezza del tetraedro è cateto del triangolo rettangolo che essa forma con l'apotema e il raggio del cerchio inscritto nel triangolo equilatero base del tetraedro.

$$V = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot \overline{VO} = \frac{1}{3}$$

Il volume del tetraedro inscritto nel cubo è un terzo di quello del cubo

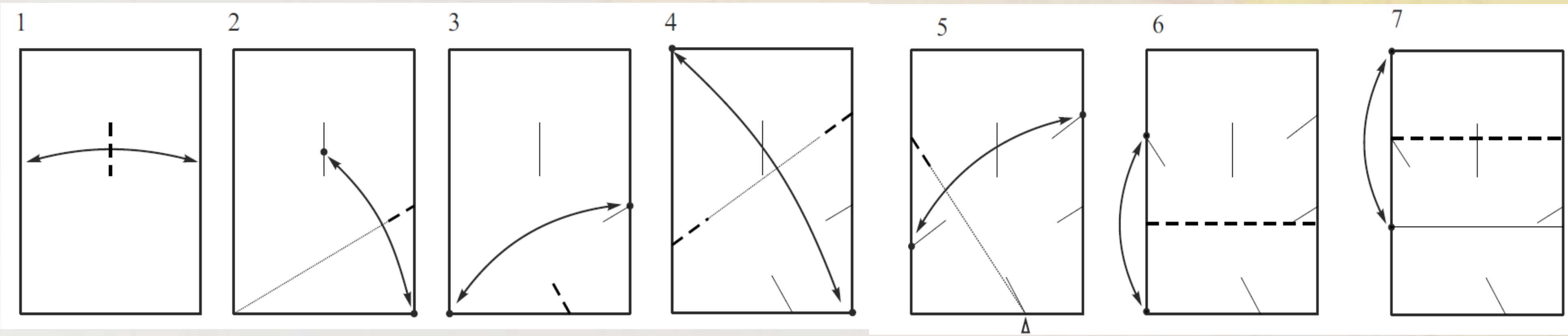
Cubo e tetraedro inscritto: da un A4 al foglio per costruire il tetraedro

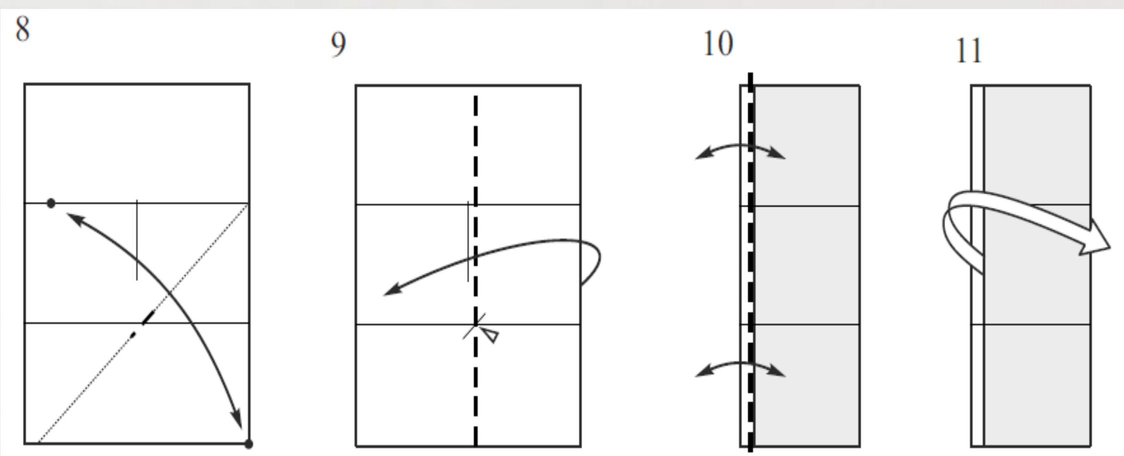
Dal foglio A4 al foglio di formato $1{:}\sqrt{3}$ (105 mm x 182 mm)

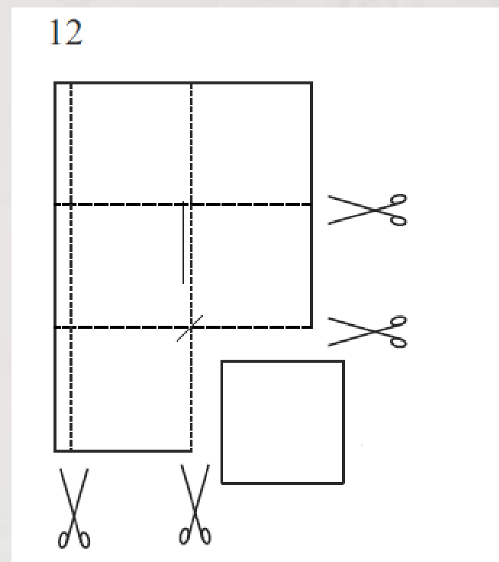


Cubo e tetraedro inscritto: da un A4 ai sei fogli per costruire il cubo

Quadrati di lato pari un terzo del lato lungo A4 $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ (99 mm x 99 mm)

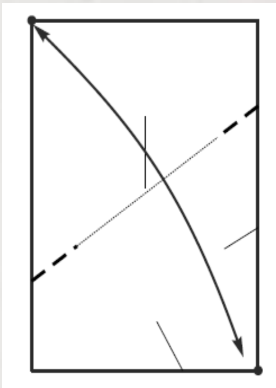




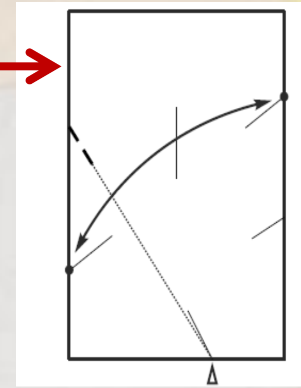


Cubo e tetraedro inscritto: da un A4 ai sei fogli per costruire il cubo

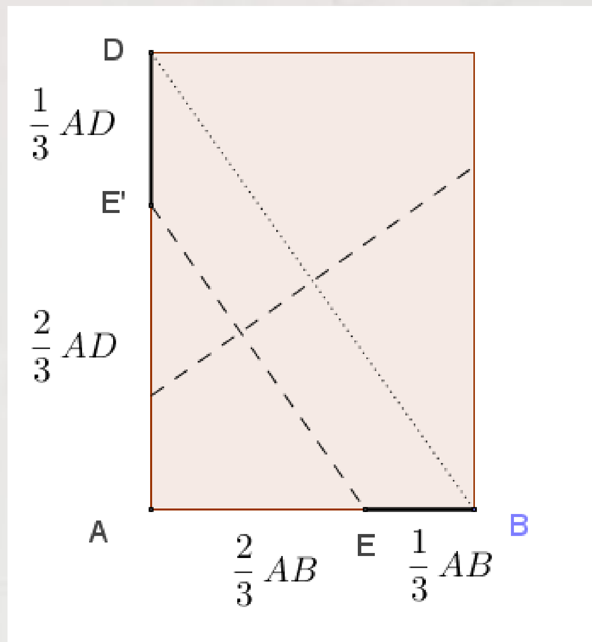
Quadrati di lato pari un terzo del lato lungo A4 $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ (99 mm x 99 mm)



$\frac{1}{3}$ *lato lungo*

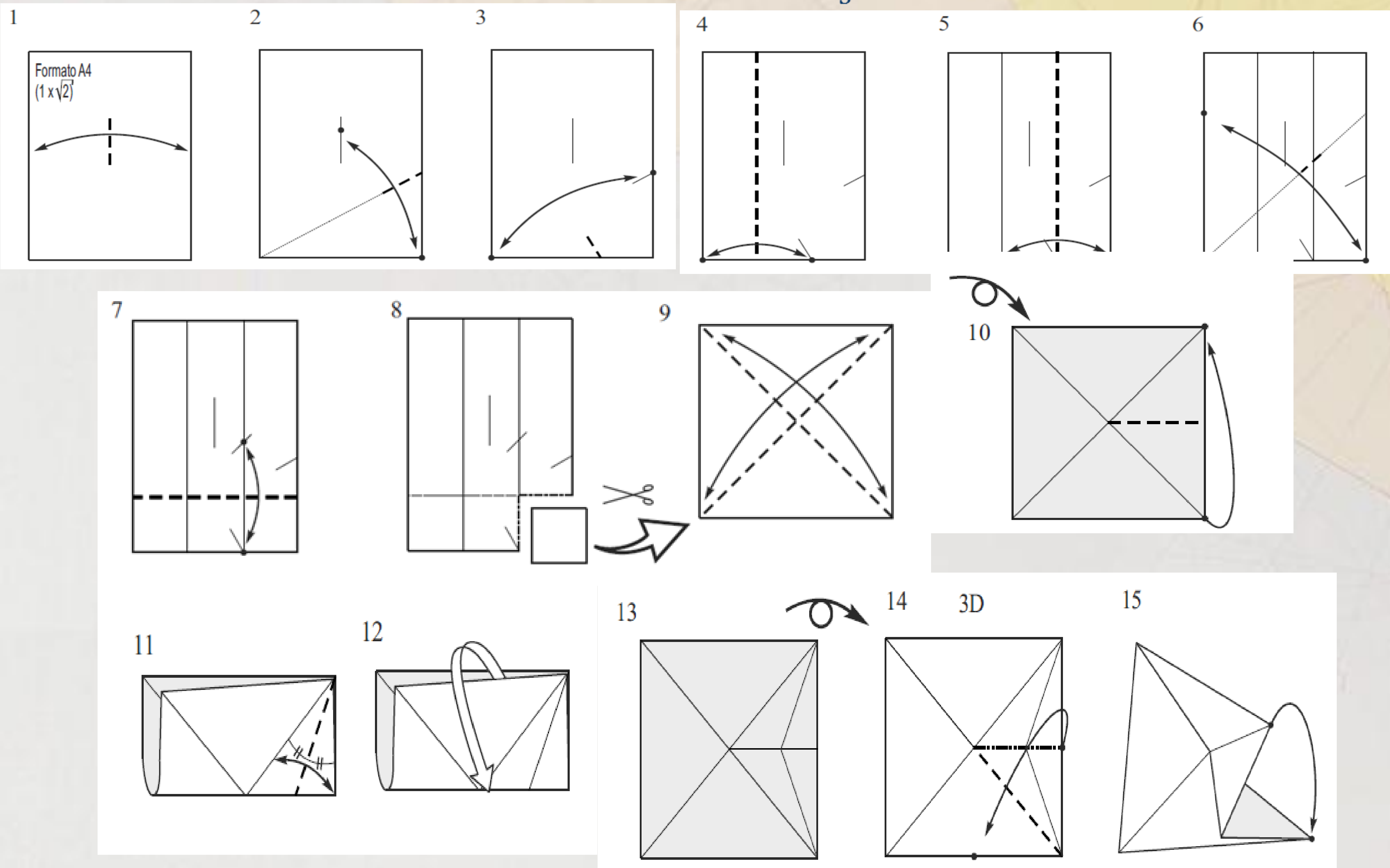


Da $\frac{1}{3}$ *lato corto* a

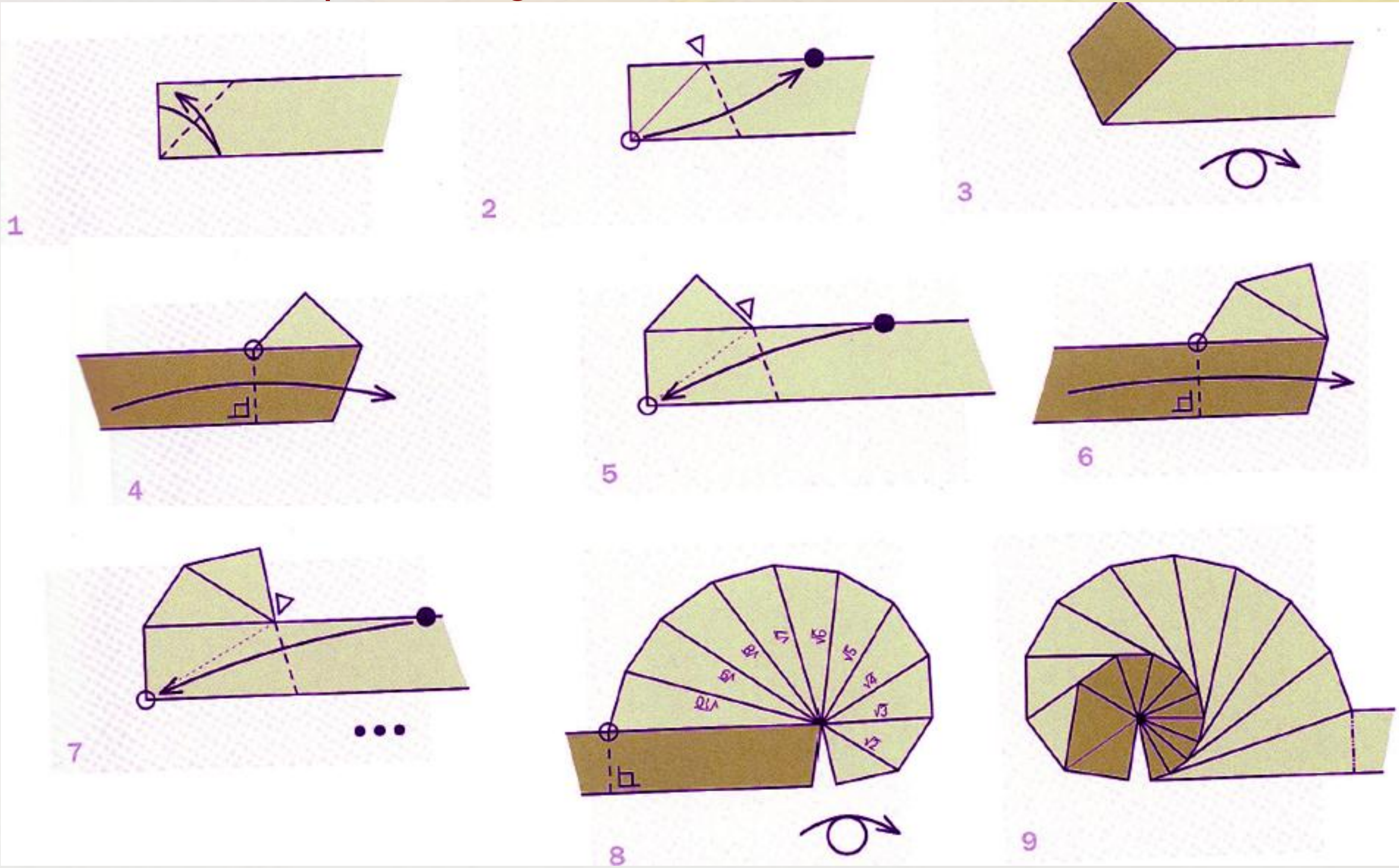


Cubo e tetraedro inscritto: da un A4 i fogli per costruire le piramidi angoloidi del cubo

Quadrati di lato pari un terzo del lato corto A4 $\frac{1}{3}a$ (70 mm x 70 mm)



La spirale degli irrazionali di Teodoro di Cirene



Schema da Tomoko Fuse SPIRAL   Origami, art, design

Attività con GeoGebra

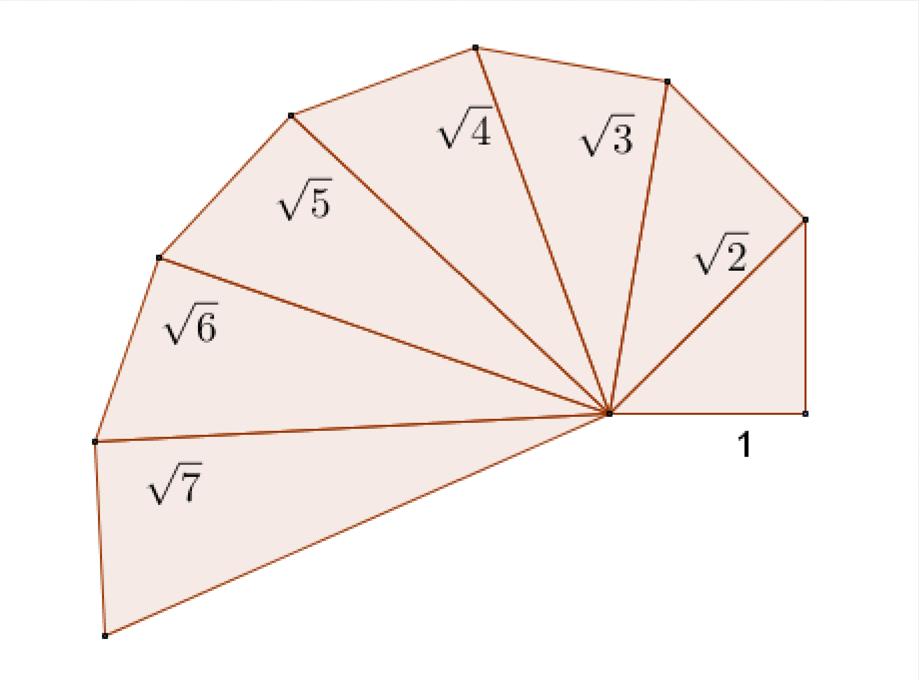
Geometria con GeoGebra

- Giochi di simmetrie con GeoGebra
- Le isometrie: simmetria assiale, simmetria centrale, traslazione, rotazione

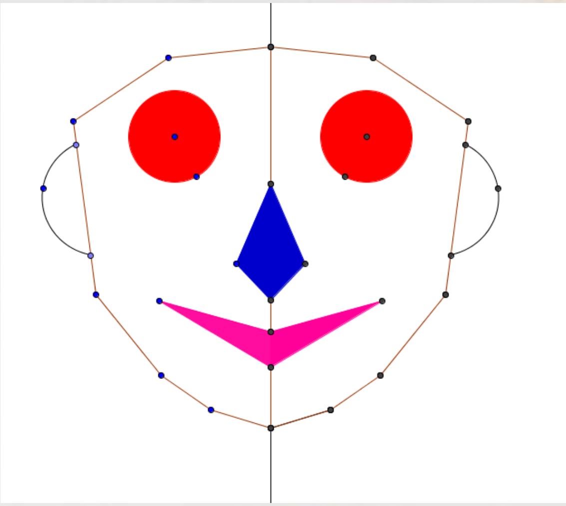
Le costruzioni

- 4_0_Spirale_di_Teodoro
- 4_1_Faccia_Simmetria_M_Dawes
- 4_2_Disegnare_con_due_mani
- 4_3_Simmetria lettere
- 4_4_simmetria_assiale
- 4_5_simmetria_centrale
- 4_6_traslazione
- 4_7_rotazione
- 4_8_simmetria_assi_paralleli_traslazione
- 4_9_doppia_simmetria_assiale_incidenti_rotazione
- 4_10a_simmetrie_congruenze_problema
- 4_10b_simmetrie_congruenze_soluzione
- 4_11_Quadrilateri_Proprietà_Parallelogrammi
- 4_12_Clock_M_Dawes

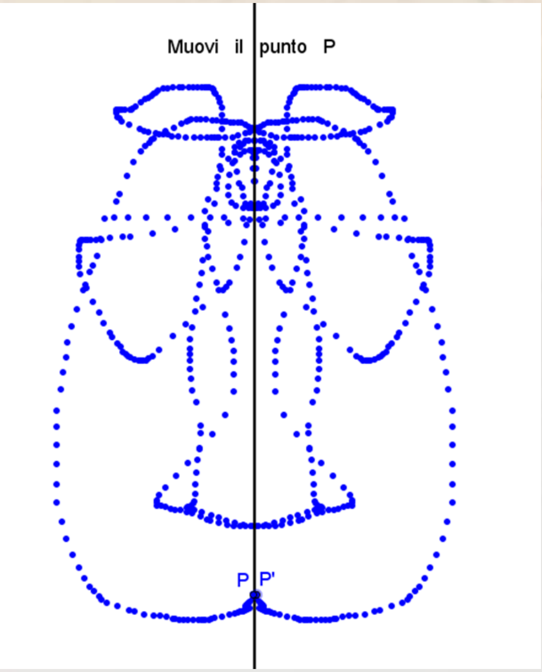
La spirale di Teodoro: i numeri irrazionali



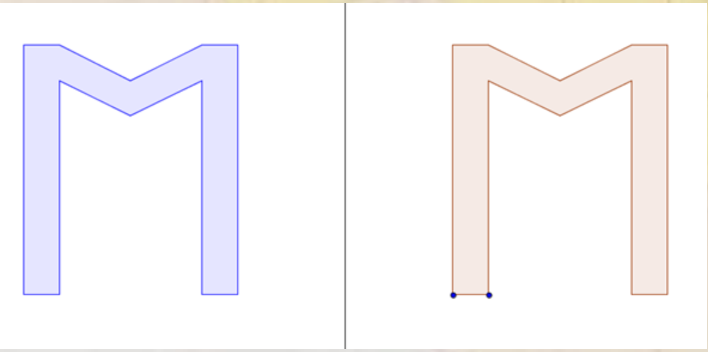
Giochi di simmetrie



Faccia simmetrica di M. Dawes

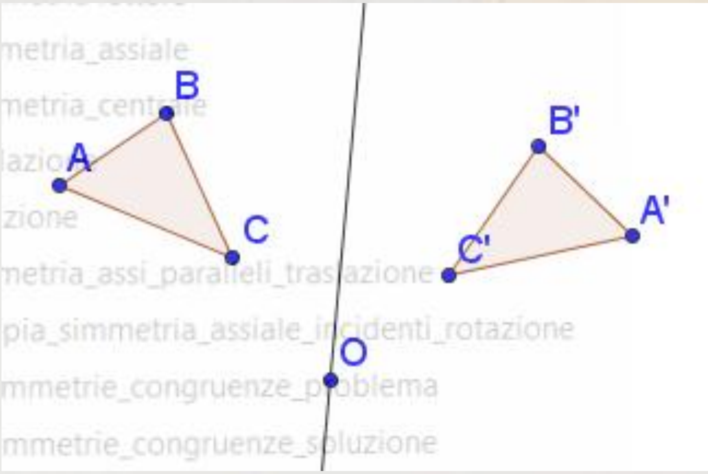


Disegnare con due mani

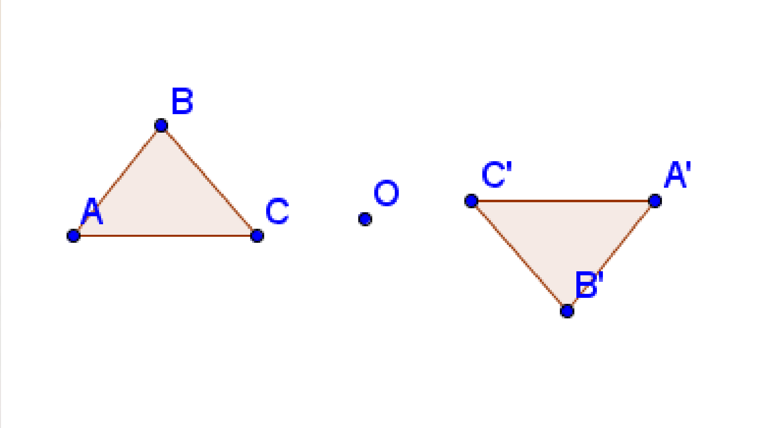


Giochi di lettere

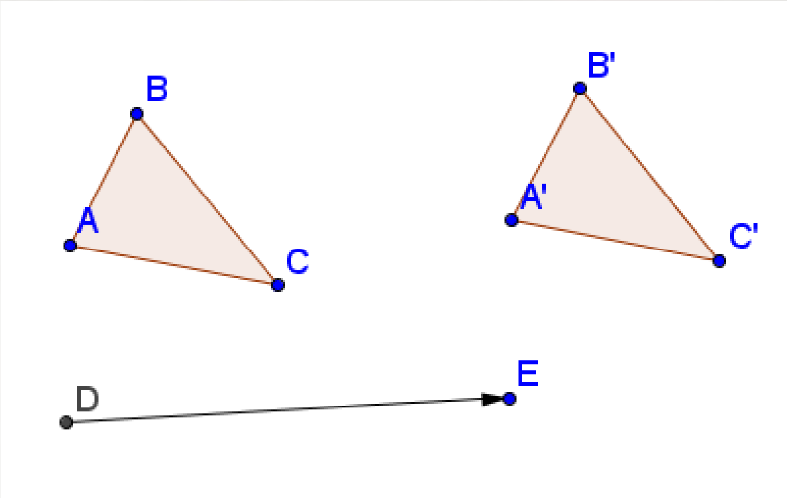
Isometrie



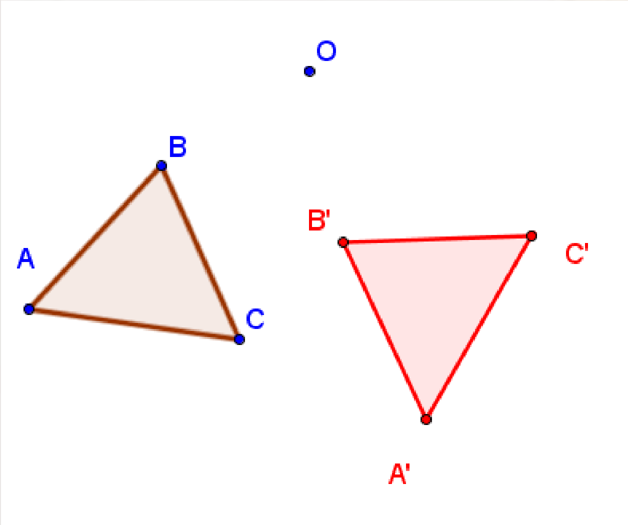
metria_assiale
metria_centrale
lazione
zione
metria_assi_paralleli_traslazione
pia_simmetria_assiale_incidenti_rotazione
mmetrie_congruenze_problema
mmetrie_congruenze_soluzione
A
B
C
A'
B'
C'
O



A
B
C
O
A'
B'
C'



A
B
C
A'
B'
C'
D
E



O
A
B
C
A'
B'
C'